

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики  
А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Энтропийные методы в комбинаторике
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Проектирование и разработка комплексных бизнес-приложений Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: И.Г. Эрлих, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 12.02.2024

## Аннотация

Дисциплина "Энтропийные методы в комбинаторике" предназначена для студентов, интересующихся применением энтропийных методов в решении комбинаторных задач. В ходе обучения студенты изучат основные понятия теории информации и энтропии, а также их применение в комбинаторике. Они будут рассматривать различные комбинаторные структуры, такие как перестановки, разбиения, графы и деревья, и изучать методы оценки их сложности с использованием энтропийных подходов. Студенты также углубят свои знания в области комбинаторной математики, развивая навыки анализа, логического мышления и решения сложных задач.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

Дать общее представление о применимости энтропии в разных отделах математики (теории вероятностей, теории информации, комбинаторики, теории чисел, геометрической теории меры и в аддитивной комбинаторике). Выработать необходимые навыки работы с энтропией, выработать интуицию, связанную с этим понятием и, вообще, с идеологией теории информации.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области аддитивной комбинаторики;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области аддитивной комбинаторики;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических ис-следований в области аддитивной комбинаторики.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- в каких разделах математики применяется энтропия, с каким кругом задач она связана, где данная методика может быть успешной.

уметь:

- пользоваться результатами теории энтропии и теоремами, упомянутыми в курсе.

владеть:

- общим базовым аппаратом данного подраздела теории информации,
- понимать особенности применения энтропии в других разделах.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Введение	5	5		5
2	Энтропия в комбинаторике	5	5		15
3	Результаты типа теоремы Турана для графов без больших клик	5	5		10
4	Энтропия в аддитивной комбинаторике	5	5		20
5	Другие применения леммы о спредах	10	10		25
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

## 1. Введение

Примеры энтропии в различных математических науках, постановки задач, аннотация результатов. Общие свойства энтропии и связанных с ней объектов.

## 2. Энтропия в комбинаторике

Энтропия в комбинаторике на примере гипотезы о union-closed set.

## 3. Результаты типа теоремы Турана для графов без больших клик

Оценка на число независимости через число рёбер для графов с ограниченным кликовым числом.

## 4. Энтропия в аддитивной комбинаторике

Доказательство полиномиальной гипотезы Фреймана-Ружи в  $(F_2)^n$ . (+ несколько вспомогательных результатов из аддитивной комбинаторики, всего лекции на 3-4).

## 5. Другие применения леммы о спредах

Метод spread-аппроксимации.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Введение в вычислительную математику, [учебное пособие] / И. Б. Петров, А. И. Лобанов. — Москва, ИНТУИТ, 2016.— URL: <https://e.lanbook.com/book/100737> (дата обращения: 13.01.2021). - Полный текст (Режим доступа : из сети МФТИ / Удаленный доступ)

Дополнительная литература

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

## 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

## 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. Успешное освоение дисциплины требует:

- посещения студентом всех видов аудиторных занятий;

- ведения конспекта в ходе лекционных занятий;
- качественной самостоятельной подготовки к практическим занятиям, активной работы на них;
- активной самостоятельной и аудиторной работы студента;
- своевременной сдачи преподавателю заданий по аудиторным видам работ.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Проектирование и разработка комплексных бизнес-приложений Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	<u>3</u>
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Дифференцированный зачет	
<b>Разработчик:</b>	И.Г. Эрлих, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Энтропийные методы в комбинаторике» обучающийся должен:

### знать:

- в каких разделах математики применяется энтропия, с каким кругом задач она связана, где данная методика может быть успешной.

### уметь:

- пользоваться результатами теории энтропии и теоремами, упомянутыми в курсе.

#### **владеть:**

- общим базовым аппаратом данного подраздела теории информации,
- понимать особенности применения энтропии в других разделах.

### **3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю**

Вопрос 1. Неравенство треугольника Ружи.

Вопрос 2. Аддитивная энергия. Оценки на аддитивную энергию. Доказательство утверждения о том, что множество с маленькой суммой имеет большую аддитивную энергию.

Примеры задач:

Задача 1. Given an arbitrary abelian group  $G$ . For any subgroup  $H \leq G$  and any subset  $S$  denote  $S/H := \{s + H : s \in S\} \subseteq G/H$ . Suppose that  $A$  и  $B$  are arbitrary nonempty subsets of the group  $G$  and  $H = H(A + B)$ . Prove that either  $|A + B| > |A| + |B|$ , or  $|(A + B)/H| = |A/H| + |B/H|$ .

Задача 2. Выведите из теоремы Кнезера следующее утверждение: Пусть  $m > 2$  и  $A, B$  непустые подмножества  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ . Если  $0 \notin B$  и  $(b, m) = 1$  для любого элемента  $b \in B \setminus \{0\}$ , то  $|A + B| > \min\{m, |A| + |B|\}$ . Эта теорема была доказана И. Човлой и носит его имя.

Задача 3. Для любых непустых конечных подмножеств  $A$  и  $B$  произвольной абелевой группы  $G$  доказать, что эквивалентны следующие утверждения: 1)  $|A + B| = |A||B|$ . 2)  $|A \cdot B| = |A||B|$ . 3)  $|\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in A \times A \times B \times B : a_1 + b_1 = a_2 + b_2\}| = |A||B|$ . 4)  $|\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in A \times A \times B \times B : a_1 b_1 = a_2 b_2\}| = |A||B|$ . 5)  $|A \setminus (x + B)| = 1$  для любых  $x \in A + B$ . 6)  $|A \setminus (B + y)| = 1$  для любых  $y \in A \cdot B$ . 7)  $(A \setminus A) \cap (B \setminus B) = \{0\}$ .

Задача 4. Рассмотрим два произвольных конечных подмножества  $A, B$  произвольного поля  $F$ , состоящих по меньшей мере из двух элементов. Докажите, что для произвольного ненулевого элемента  $c \in F$  неравенство  $|A + cB| < |A||B|$  выполнено тогда и только тогда, когда найдутся элементы  $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2$ , такие, что  $c = a_1 a_2^{-1} b_2 b_1^{-1}$ . Напомним, что множество  $cB = \{c \cdot b : b \in B\}$ . Задача 5. Рассмотрим произвольное конечное поле  $F$  и любое его подполе  $P \subseteq F$ . Докажите, что для произвольных ненулевых элементов  $c, d \in F \setminus \{0\}$  множество  $A = c + dP$  удовлетворяет равенствам  $|A + A| = |A|$  и  $|A \cdot A| = |A|$  одновременно тогда и только тогда, когда  $c \in dP$ .

Задача 6. Докажите, что некоторое подмножество  $A$  поля  $F$  ( $|A| > 2, |F| > 2$ ) удовлетворяет равенствам  $|A \cdot A| = |A|$  и  $|A + A| = |A|$  одновременно тогда и только тогда, когда  $A$  есть мультипликативный сдвиг некоторого подполя  $P \subseteq F$ , то есть существуют элемент  $c \in F$ , такие, что  $A = cP$ .

Задача 7. Пусть  $p$  произвольное простое число и  $c_1, c_2, \dots, c_k$  любые ненулевые коэффициенты из  $\mathbb{Z}_p$ . Рассмотрим функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = c_1 x_1 + c_2 x_2^2 + \dots + c_k x_k^k$ . Докажите, что сравнение  $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv n \pmod{p}$  разрешимо для любого  $n$ .

8. Энтропийное доказательство теоремы Краскала-Катона.

9. read lemma: энтропийное доказательство. Применение для доказательства усиленной леммы о подсолнухах.

10. Неточная оценка через теорему Ширера и точная оценка через независимое пересемплирование.

### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Задача об оптимальном однозначном коде и мотивация определения энтропии.
2. Энтропия, условная энтропия, взаимная информация, условная взаимная информация и их основные свойства. Независимость и условная независимость с точки зрения энтропии.
3. Простейшие применения энтропийного метода в комбинаторике: оценка суммы биномиальных коэффициентов; разбиение полного графа на парасочетания.
4. Теорема Гилмера о том, что union-closed set conjecture верна с точностью до константы.
5. Теоремы Брегмана и Каха-Ловаса о количестве совершенных парасочетаний в графе. ?
6. Неравенство Ширера.
7. Теорема Лумиса-Уитни.
8. Верхняя оценка числа копий подграфа в графе через количество рёбер графа и дробное число независимости подграфа.
9. Точность оценки из предыдущего пункта. ?



10. Количество радужных треугольников при раскраске графа в 3 цвета. Неточная оценка через теорему Ширера.

11. Количество радужных треугольников при раскраске графа в 3 цвета. Точная оценка через независимое пересемплирование. ?

#### Критерии оценивания

Оценка "Отлично" (10) - полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продемонстрирован грамотный подход к решению задач, реализованы оптимальные алгоритмы, код оформлен в едином удобочитаемом стиле.

Оценка "Отлично" (9) - полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продемонстрирован грамотный подход к решению задач, реализованы оптимальные алгоритмы.

Оценка "Отлично" (8) - полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продемонстрирован грамотный подход к решению задач.

Оценка "Хорошо" (7) - полностью решены все задачи. Допущены несущественные ошибки.

Оценка "Хорошо" (6) - полностью решено большинство задач. В некоторых задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.

Оценка "Хорошо" (5) - полностью решено две трети задач. В некоторых задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.

Оценка "Удовлетворительно" (4) - полностью решено более половины задач. В остальных задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.

Оценка "Удовлетворительно" (3) - полностью решено более половины задач.

Оценка "Неудовлетворительно" (2) - решено менее половины задач.

Оценка "Неудовлетворительно" (1) - не решено ни одной задачи.

#### **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Дифференцированный зачет может проводиться по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий и других видов работ, предусмотренных программой дисциплины и (или) путем организации специального опроса, проводимого в устной и (или) письменной форме.

При проведении устного дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося на дифференцированном зачете не должен превышать одного астрономического часа.

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, конспектами лекций или другими материалами.